BAB II
RELASI & FUNGSI

1. Pengantar

Pada bab 1 telah dipelajari logika proposisi, Himpunan, beserta sifat-sifat yang berlaku yang mana teori tersebut mendasari pembahasan paba bab 2. Pada bab 2 ini dibahas relasi dua himpunan, relasi biner, terapan relasi dalam bentuk table, graf , matriks dan penggunaan pada masalah riil. Selain relasi dibahas pula fungsi antara dua himpunan atau lebih beserta sifat – sifatnya (injektif, surjektif dan bijektif). Juga di bahas tentang fungsi kusus: *Fungsi floor dan ceiling* , *fungsi factorial, fungsi eksponensial* , *f*ungsi dan *algoritma Rekursif*,
fungsi Rekursif.

2. Kompetensi

Setelah mempelajari materi ini mahasiswa memahami relasi, relasi biner, fungsi dengan sifat-sifatnya dan trampil serta dapat menerapkan pada masalah riil dengan tepat.

3. Pokok Bahasan : Relasi & Fungsi

Sub. Pokok Bahasan :

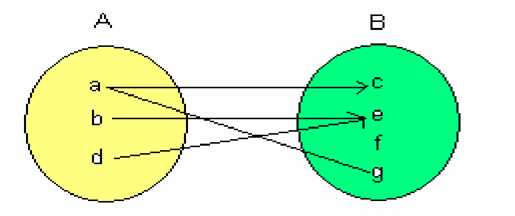
Relasi , Relasi Biner ,
Representasi relasi (dalam bentuk Tabel, Matriks, Graf Berarah)
Sifat-Sifat Relasi Biner (*reflexive*, *symmetric*, *transitive)*
Kombinasi Relasi, Komposisi Relasi, Aplikasi Relasi pada database.
Fungsi (Fungsi Invers , Komposisi fungsi)
Beberapa Fungsi Khusus (*Fungsi floor dan ceiling, Fungsi Modulo, Fungsi factorial, Fungsi Eksponensial dan logaritmik)*
Fungsi dan algoritma Rekursif

4. Kegiatan belajar

Hubungan antara elemen suatu himpunan dengan elemen himpunan lainnya sering dijumpai pada masalah riil. Misalnya hubungan antara indek prestasi dengan pengambilan matakuliah, antara komputer server dengan workstation, distributor dengan penjual dll. Hal ini secara tidak langsung menerapkan sifat pada relasi dalam permasalahan nyata. Pada bab ini akan ditinjau sifat-sifat relasi, relasi biner, fungsi secara teori dan contoh penerapannya.

4.1. Relasi

Relasi antara himpunan A dan himpunan B didefinisikan sebagai cara pengawanan anggota himpunan A dengan anggota himpunan B ilustrasi grafis dapat dilihat sbb:



Gambar 2.1. Relasi dua himpunan

4.1.1. Relasi biner

Relasi biner adalah himpunan yang anggotanya berupa pasangan terurut dengan elemen pertama merupakan elemen dari suatu himpunan daerah domain dan elemen ke dua merupakan elemen dari suatu himpunan daerah hasil. Himpunan pasangan terurut diperoleh dari perkalian kartesian (*cartesian product*) antara dua himpunan.

Definisi 2.1: Perkalian kartesian antara himpunan A dan B adalah himpunan yang elemennya semua pasangan terurut (*ordered pairs*) yang mungkin terbentuk dengan komponen pertama elemen himpunan A dan komponen kedua elemen himpunan B.

Secara matematis dinotasikan sbb:

$$A \times B = \{ (a,b) / a \in A \text{ dan } b \in B \}$$

Relasi biner R antara himpunan A dan B adalah ***himpunan bagian*** dari A x B, dinyatakan R ⊂ (A x B)

Pasangan elemen dua himpunan A dan B menjadi anggota R yaitu (a,b)∈ R, atau digunakan notasi a R b yang artinya 'a dihubungkan dengan b oleh R' atau dibaca 'elemen a ∈ A berelasi dengan b∈ B', dan jika (a,b) ∉ R digunakan notasi $a\overline{R}b$ yang artinya 'a tidak dihubungkan dengan b oleh relasi R' atau 'a tidak berelasi dengan b'. Himpunan A disebut daerah asal (dominan) dari R, dan himpunan B disebut daerah hasil (range) dari R.

Contoh 2.1: Misalkan P = {Jojon, Timbul, Basuki} adalah himpunan nama mahasiswa, dan Q = {SB221, SB251, SB342} adalah himpunan kode matakuliah di Jurusan sosial budaya. Urutan terakhir pada kode matakuliah bernomer ganjil menyatakan semester ganjil dan kode matakuliah urutan terakhir nomer genap menyatakan semester genap.

Maka perkalian kartesian antara himpunan P dan Q menghasilkan himpunan pasangan terurut yang jumlah anggotanya adalah |P|.|Q| = 3 . 3 = 9 buah. Perkalian tersebut adalah sebagai berikut :

P x Q = {(Jojon, SB221), (Jojon, SB 251), (Jojon, SB342), (Timbul, SB221), (Timbul, SB251), (Timbul, SB342), (Basuki,SB221), (Basuki,SB 251), (Basuki , SB342)}.

Contoh 2.2: Jika R adalah relasi yang menyatakan mata kuliah yang diambil oleh mahasiswa pada Semester Ganjil , yaitu :

R = {(Jojon , SB221), (Jojon,SB251) , (Timbul, SB221), (Timbul, SB251) }

maka

R ∈ (P x Q), P adalah daerah asal R dan Q adalah daerah hasil R.

Karena (Jojon , SB221) $\in$ R maka dapat ditulis Jojon R SB221 artinya nama mahasiswa bernama Jojon mengambil matakuliah dengan kode matakuliah SB221 dan

Jojon , SB342) $\notin$ R maka Jojon $\overline{R}$ SB252, artinya Jojon tidak mengambil matakuliah dengan kode matakuliah SB342 .

Contoh 2.3: Diberikan himpunan P = {2, 4, 8, 9} dan Q = { 2, 3, 4, 12}. Apabila didefinisikan relasi R dari himpunan P ke Q dengan (p,q) $\in$ R dengan q habis dibagi p, tentukan himpunan R.

Jawab: Semua elemen dari P x Q, dapat dinyatakan dalam bentuk tabel, diagram atau grafik salah satunya sbb:

P \ Q	2	3	4	12
2	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,12)
4	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,12)
8	(8,2)	(8,3)	(8,4)	(8,12)
9	(9,2)	(9,3)	(9,4)	(9,12)

maka relasi R yang memenuhi adalah R = { (2,2), (2,4), (4,4),(2,12),(4,12)}.

Daerah asal dan daerah hasil relasi dapat merupakan himpunan yang sama. Ini berarti bahwa relasi hanya didefinisikan pada sebuah himpunan. Hal Ini dapat dikemukakan dengan definisi berikut :

Definisi 2.2: Relasi pada himpunan Q adalah relasi dari Q x Q, dengan kata lain, *relasi pada himpunan Q* adalah *himpunan bagian* dari Q x Q.

Contoh 2.4.: Misalkan R adalah relasi pada Q = {1, 2, 5, 6 } yang didefinisikan oleh (x,y) $\in$ R jika x adalah faktor prima dari y. Maka kartesian product dari himpunan Q dengan Q adalah :

Q x Q ={(1,1),(1,2), (1,5),(1,6),(2,5),(2,6)…(6,6)}

Untuk menyatakan semua pasangan terurut dari Q x Q dapat dilakukan sbb :

Q \ Q	1	2	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,5)	(2,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,5)	(6,6)

dan relasi R yang mempunyai sifat x adalah faktor prima dari y adalah
R = {(2,2), (1,5), (2,5), (5,1) }

4.2. Representasi relasi

Terdapat beberapa cara untuk menyajikan relasi. Diantaranya disajikan 3 cara yang lazim, yaitu tabel, matriks, graf berarah.

4.2.1. Representasi Relasi dengan Tabel

Jika relasi direpresentasikan dengan tabel, maka kolom pertama tabel menyatakan daerah asal, sedangkan kolom kedua menyatakan daerah hasil.
Relasi R pada P x Q untuk P = { Jojon, Timbul , Basuki} adalah himpunan nama mahasis wa, dan Q = {SB221, SB251, SB342} himpunan kode matakuliah dapat dinyatakan dengan Tabel 2.1 berikut

Tabel 2.1

P	Q
Jojon	SB251
Jojon	SB221
Timbul	SB221
Timbul	SB251

4.2.2. Representasi Relasi dengan Matriks

Misalkan R adalah relasi dari himpunan A ={ a_1, a_2, … , a_m} dan B ={ b_1, b_2, … , b_n}, Relasi R dapat disajikan dengan matriks M = [m_{ij}],

$$M = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & \cdots\cdots & b_n \end{array} \\ \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{array} & \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{m1} & m_{m2} & \cdots & m_{mn} \end{bmatrix} \end{array}$$

dimana :

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & (a_i, b_j) \in R \\ 0, & (a_i, b_j) \notin R \end{cases}$$

dengan kata lain elemen matriks yang terletak pada baris ke i dan kolom ke j bernilai 1 apabila a_i berelasi dengan b_j, dan bernilai 0 apabila a_i tidak berelasi dengan b_j.
Relasi R pada Contoh 2.1 yaitu

R = { (Jojon , SB221), (Jojon,SB251) , (Timbul, SB221) , (Timbul, SB251) }

dapat dinyatakan dengan matriks sbb:

$$\begin{array}{c} \\ J \\ T \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} SB221 & SB253 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

dalam hal ini a_1 = J ojon disingkat J , a_2 = timbul disingkat T dan b_1= SB221, b_2 = SB253

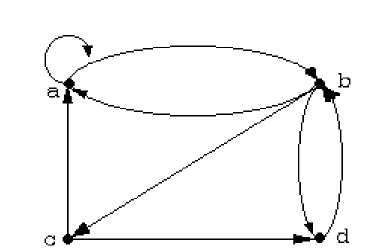
4.2.3. Representasi Relasi dengan Graf Berarah

Representasi dengan graf berarah (*directed graph* atau *digraph*) merupakan representasi relasi secara grafis. Setiap *elemen himpunan* dinyatakan dengan sebuah titik (simpul atau ***vertex***), dan tiap *pasangan terurut* dinyatakan dengan garis atau busur (*arc*) yang arahnya ditunjukkan dengan sebuah panah. Dengan kata lain, jika (a, b) $\in$ R, maka sebuah busur dibuat dari simpul a ke simpul b, simpul a disebut simpul asal (*initial vertex*) dan simpul b disebut simpul tujuan (*terminal vertex).*

Pasangan terurut (a,a) dinyatakan dengan busur dari simpul a ke a sendiri. Busur semacam itu disebut gelang atau *kalang (loop)*

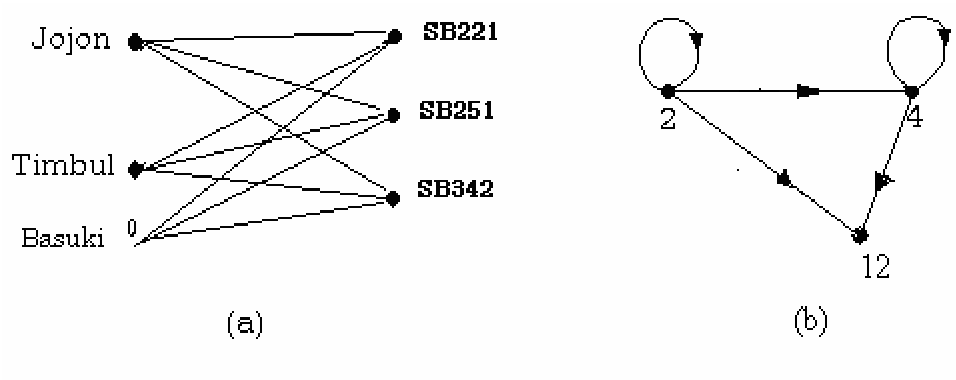
Contoh 2.5. : Diketahui R = {(a, a), (a, b), (b, a), (b, c), (b, d), (d , b),(c, a), (c, d)} merupakan relasi dari himpunan A = { a, b, c, d }. R direpresentasikan dengan graf berarah pada gambar 2.1 sebagai berikut

R = {(a, a), (a, b), (b, a), (b, c), (b, d), (c, a), (c, d), (d, b) }



Gambar 2.1. Representasi graf untuk relasi R

Relasi pada Contoh 2.1 direpresentasikan dengan graf tak berarah pada Gambar 2.2. a), relasi R pada Contoh 2.3. direpresentasikan dengan graf pada Gambar 2.2.b)



Gambar 2.2. Representasi graf untuk relasi pada contoh 2.1, dan 2.3.

4.3. Sifat-Sifat Relasi Biner

1. Refleksif (*reflexive*)

Relasi R pada himpunan A disebut *refleksif* jika (a, a) ∈ R *untuk setiap* a ∈ A

Contoh 2.6.

Misalkan A = {1, 2, 3, 4 }, dan relasi R dibawah ini didefinisikan pada himpunan A, maka :

(a) R = { (1, 1) , (1, 3) , (2, 1) , (2, 2) , (3, 3) , (4, 2) , (4, 3) , (4, 4) }
bersifat *refleksif* karena terdapat elemen relasi yang berbentuk (a, a), yaitu (1, 1), (2, 2) , (3, 3) , (4, 4).

(b) R = { (1, 1) , (2, 2) , (4, 2) , (4, 3) , (4, 4) } *tidak* bersifat refleksif karena (3 ,3) ∈R tetapi (3,3) tidak termuat dalam R.

2. Setangkup (Symmetric)

Relasi R pada himpunan A disebut setangkup jika *untuk semua* a, b ∈ A, (a, b) ∈R , maka (b, a) ∈ R. Sebaliknya, R disebut tak setangkup (*anti sysmmetric*) untuk a,b ∈A, jika (a, b) ∈ R dan a ≠ b, maka (b,a) ∉ R

Contoh 2.7 : Misalkan A{1, 2, 3, 4} dan relasi R dibawah ini didefinisikan pada himpunan A, maka,

(a) R = { (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (4, 2), (4, 4) } bersifat setangkup karena setiap (a, b) ∈R maka (b, a)∈ R.pada kejadian tersebut (1,2) dan (2, 1) ∈ R; (2, 4) dan (4, 2) ∈ R begitu juga (1,1),(2, 2) dan (4, 4) ∈ R .

(b) R = { (1, 1) , (2, 3) , (2, 4) , (4, 2) }tidak bersifat setangkup karena (3,2) ∉ R

3. Menghantar (*transitive*)

Relasi R disebut menghantar bilamana (a, b) ∈R dan (b, c) ∈ R , maka (a, c) ∈R, untuk a, b, c ∈A.

Contoh 2.8

Misalkan A = { 1, 2, 3, 4 }, dan relasi R di bawah ini didefinisikan pada himpunan A, maka

a. R = {(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3) } bersifat menghantar. Lihat tabel berikut :

Pasangan terbentuk		
(a, b)	**(b, c)**	**(a, c)**
(3, 2)	(2, 1)	(3, 1)
(4, 2)	(2, 1)	(4, 1)
(4, 3)	(3, 1)	(4, 1)
(4, 3)	(3, 2)	(4, 2)

b. R = {(1, 1), (2, 3), (2, 4), (4, 2)}tidak bersifat menghantar karena (2, 4) dan (4, 2)∈ R, tetapi (2, 2) ∉ R, begitu juga (4, 2) dan (2, 3) ∉ R, tetapi (4, 3) ∈ R.

c. R = { (4, 3) } bersifat menghantar.

4.4. Kombinasi Relasi

Karena relasi biner merupakan himpunan pasangan terurut, maka operasi himpunan seperti irisan, gabungan, selisih dan beda setangkup antara dua relasi atau lebih juga berlaku. Hasil operasi tersebut juga berupa relasi . dengan kata lain, jika R_1 dan R_2 masing-masing adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B, maka $R_1 \cap R_2$, $R_1 \cup R_2$, $R_1 - R_2$ dan $R_1 \oplus R_2$ juga relasi dari A ke B.

Contoh 2.9

Misalkan A = { a, b, c } dan B = { a, b, c, d} . Relasi R_1 = { (a, a), (b, b), (c, c)}dan relasi R_2 = { (a, a) , (a, b) , (a, c) , (a, d) }adalah relasi dari A ke B . Kita dapat mengkombinasikan kedua buah relasi tersebut untuk memperoleh $R_1 \cap R_2$ = {(a,a)}

$R_1 \cup R_2$ = {(a,a), (b,b), (c,c), (a,b), (a,c), (a,d)}

$R_1 - R_2$ = {(b,b), (c,c)}

$R_2 - R_1$ = {(a,b), (a,c), (a,d)}

$R_1 \oplus R_2$ = {(b,b), (c,c), (a,b), (a,c), (a,d)}

Jika relasi R_1 dan R_2 masing-masing dinyatakan dengan matriks M_{R1} dan M_{R2} , maka matriks yang menyatakan gabungan dan irisan dari kedua relasi tersebut adalah

$$M_{R1\cup R2} = M_{R1} \vee M_{R2} \text{ dan } M_{R1\cap R2} = M_{R1} \wedge M_{R2}$$

dalam hal ini , operator " $\vee$ " berarti " atau" , " $\wedge$ " berarti "dan".

Contoh 2.10.

Misalkan bahwa relasi R_1 dan R_2 dan pada himpunan A dinyatakan oleh matriks

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad dan \quad R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

maka matriks yang menyatakan $R_1 \cup R_2$ dan $R_1 \cap R_2$ adalah

$$M_{R1\cup R2} = M_{R1} \vee M_{R2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{R1\cap R2} = M_{R1} \wedge M_{R2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4.5. Komposisi Relasi

Cara lain mengkombinasikan relasi adalah mengkomposisikan dua buah relasi atau lebih,. komposisi relasi analog dengan komposisi fungsi.

Definisi 2.3.

Misalkan R adalah relasi dari himpunan A ke himpunan B, dan S adalah relasi dari himpunan B ke C. Komposisi R dan S, dinotasikan dengan R o S, adalah relasi dari A ke C yang didefinisikan sebagai berikut :

$$R \circ S = \{(a,c) \mid a \in A,\ c \in C, \text{dan untuk beberapa } b \in B, (a, b) \in R \text{ dan } (b, c) \in S\}$$

Contoh 2.11.

Diberikan R = {(1,2), (1,6), (2,4), (3,4), (3,6), (3,8)} adalah relasi dari himpunan {1, 2, 3} ke himpunan {2, 4, 6, 8} dan S = {(2, *u*), (4, *s*), (4, *t*), (6, *t*), (8, *u*)} adalah relasi dari himpunan {2, 4, 6, 8} ke himpunan {*s, t, u*}. Maka komposisi relasi R dan S adalah

R o S = { (1, u), (1, t), (2, s), (2, t), (3, s), (3, t), (3, u)}

Jika relasi R_1 dan R_2 masing-masing dinyatakan dengan matriks M_{R1} dan M_{R2} , maka matriks yang menyatakan komposisi dari kedua relasi tersebut adalah

$$M_{R1 o R2} = M_{R21} \cdot M_{R2}$$

Dalam hal ini operator " . " prosesnya sama seperti pada perkalian matriks biasa, tetapi tanda " . " diganti dengan tanda "$\vee$ " dan tanda tambah " + " diganti dengan "$\wedge$".

Contoh 2.12.

Misalkan bahwa relasi R_1 dan R_2 pada himpunan A dinyatakan oleh matriks

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad dan \quad R_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

maka matriks yang menyatakan R_1 o R_2 adalah

$$M_{R1 \text{ o } R2} = M_{R1} . M_{R2}$$

$$= \begin{bmatrix} (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) & (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) & (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \\ (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) & (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) & (1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) \\ (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) & (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0) & (0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (0 \wedge 1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4.6. Aplikasi Relasi

4.6.1. Relasi *n-ary* dan aplikasinya

Relasi biner hanya menghubungkan antara dua buah himpunan. Relasi yang lebih umum menghubungkan lebih dari dua buah himpunan, relasi tersebut dinamakan relasi *n-ary* (baca : ener). Jika n = 2, maka relasinya dinamakan relasi biner (bi = 2). Relasi n-ary mempunyai terapan penting di dalam basis data.

Definisi 2.4.

Misalkan $A_1, A_2, \ldots. A_n$ adalah himpunan. Relasi n-ary R pada himpunan-himpunan tersebut adalah himpunan bagian dari $A_1 \times A_2 \times \ldots. \times A_n$, atau dengan notasi $R \subseteq A_1 \times A_2 \times \ldots. \times A_n$ .Himpunan $A_1, A_2, \ldots. A_n$ disebut daerah asal relasi dan n disebut derajat.

Contoh 2.13: Misalkan

NIM = {13598211, 13598214, 13598215, 13598319, 13598351, 13598425}
Nama = {Bela , Nadia, Lee, Tomingse, Cecep, Safira}
MTK = {Matematika Diskrit,Algoritma,Struktur Data,Arsitektur Komputer }
Nilai = { A, B, C, D, E }

Berturut-turut adalah himpunan Nomor Induk mahasiswa(NIM), himpunan nama-nama mahasiswa(Nama), himpunan nama-nama mata kuliah(MTK), dan himpunan nilai mata kuliah(Nilai).

Relasi MHS yang terdiri dari 5-tupel (NIM, Nama, MTK, Nilai) merepresentasikan hubungan antara nomor induk mahasiswa, namanya, mata kuliah yang diambilnya, dan nilai mata kuliah. Satu contoh relasi yang bernama MHS adalah

MHS = { (13598211 , Bela , Matematika Diskrit, A) , (13598211, Bela, Arsitektur Komputer, B), (13598214,Nadia , arsitektur Komputer, D), (13598215, Lee, Algoritma, C) , (13598215, Lee, Struktur Data, C) , (13598319, Tomingse, Algoritma, E), (13598351, Cecep, Algoritma, A), (13598351, Cecep, Arsitektur Komputer,B) }

relasi MHS tersebut diatas dapat ditulis dalam bentuk Tabel 2.4.

Tabel 2.4 Relasi antara nomor induk mahasiswa, nama mahasiswa dan mata kuliah

NIM	Nama	MatKul	Nilai
13598211	Bela	Matematika Diskrit	A
13598011	Bela	Arsitektur Komputer	B
13598214	Nadia	Algoritma	D
13598215	Lee	Algoritma	C
13598215	Lee	Struktur Data	C
13598215	Lee	Arsitektur Komputer	B
13598219	Tomingse	Algoritma	E
13598351	Cecep	Algoritma	B
13598351	Cecep	Arsitektur Komputer	B

Basis data (*database*) adalah kumpulan tabel. Salah satu model basisdata adalah model basisdata relasional (*relational database*). Pada basis data relasional, satu tabel menyatakan satu relasi, setiap *kolom* pada tabel menunjukkan letak *atribut*. Setiap tabel pada basisdata diimplemen-tasikan secara fisik sebagai sebuah *file*. *Satu baris data* pada

tabel menyatakan sebuah *record*, dan setiap *atribut* menyatakan sebuah *field*. Dengan kata lain, secara fisik basisdata adalah kumpulan *file*, sedangkan *file* adalah kumpulan *record,* terdiri atas sejumlah *field.*Teori basisdata didasarkan pada konsep relasi *n-ary* pembahasan teori basisdata harus dilepaskan dari implementasi fisiknya. Atribut khusus pada tabel yang mengidentifikasikan secara unik elemen relasi disebut kunci (*key*). Pada contoh 2.13 diatas, *NIM* merupakan kunci, atribut Nama bukan atribut kunci karena memungkinkan muncul dua nama yang sama. Operasi yang dilakukan terhadap basisdata dilakukan dengan perintah pertanyaan yang disebut *query*. Satu contoh *query* misalnya,

" tampilkan semua mahasiswa yang engambil mata kuliah Matematika Diskrit"
" tampilkan daftar nilai mahasiswa dengan NIM = 13598315 "
" tampilkan daftar mahasiswa yang terdiri atas NIM dan mata kuliah yang diambil"

pada hakekatnya, *query* terhadap basisdata relasional dapat dinyatakan secara abstrak dengan operasi pada relasi *n-ary*. Ada beberapa operasi yang dapat digunakan, diantaranya adalah seleksi, proyeksi, dan join.

4.6.2. Seleksi

Operasi seleksi memilih baris tertentu dari suatu tabel yang memenuhi persyaratan tertentu yang diberi notasi σ atau Operator : σ

Contoh 2.14

Misalkan untuk relasi MHS kita ingin menampilkan daftar mahasiswa yang mengambil mata kuliah Matematika Diskrit. Operasi Seleksinya adalah

$\sigma_{\text{MTK = "Matematika Diskrit"}}$ (MhS) yang menghasilkan tupel (13598211, Bela, matematika Diskrit, A),(13598425, Safira, Matematika Diskrit, B).

4.6.3. Proyeksi

Operasi proyeksi memilih kolom tertentu dari suatu tabel. Jika ada beberapa baris yang sama nilainya, maka hanya diambil satu kali. yang diberi notasi π atau Operator : π

Contoh 2.15.

Operasi Proyeksi $\pi_{\text{Nama, MTk, Nilai}}$ (MHS)

Contoh 2.16.

Misalkan A = { a, b, c } dan B = { a, b, c, d}.

Relasi = { (a, a), (b, b), (c, c)} menghasilkan Tabel 2.5. Sedang Operasi proyeksi $\pi_{\text{NIM, Nama}}$ (MHS) menghasilkan Tabel 2.6.

Tabel 2.5, $\pi_{\text{Nama, MTk, Nilai}}$ (MHS)

Nama	MatKul	Nilai
Bela	Matematika Diskrit	A
Bela	Arsitektur Komputer	B
Nadia	Algoritma	D
Lee	Algoritma	C
Lee	Struktur Data	C
Lee	Arsitektur Komputer	B
Tomingse	Algoritma	B
Cecep	Algoritma	B
Cecep	Arsitektur Komputer	B

Tabel 2.6. $\pi_{\text{NIM, Nama}}$ (MHS)

NIM	Nama
13598211	Bella
13598214	Nadia
13598315	Lee
13598319	Tomingse
13598351	Cecep
13598425	Safira

Join

Operasi *Join* menggabungkan dua buah tabel menjadi satu bila kedua tabel mempunyai atribut yang sama. Sebagai contoh, suatu tabel mengandung NIM, Nama, Jenis Kelamin, dan tabel lain mengandung NIM, Nama MTK, Nilai. Gabungan keduanya menghasilkan tabel baru yang mengandung atribut NIM, Nama, jenis Kelamin, MatKul, dan Nilai.

Operator : τ

Contoh 2.17.

Misalkan relasi MHS1 dinyatakan dengan tabel 2.7 dan relasi MHS2 dinyatakan dengan Tabel 2.8.

Operasi *join*

$\tau_{\text{NIM. Nama}}$ (MHS1, MHS2) Menghasilkan Tabel 2.9

Tabel 2.7. Relasi MHS1

NIM	Nama	Jenis Kelamin (JK)
1359800 1	Hananto	L
13598002	Guntur	L
13598004	Heidi	W
13598006	Harman	L
13598007	Karim	L

Tabel 2.8. Relasi MHS2

NIM	Nama	MatKul	Nilai
13598001	Hananto	Algoritma	A
13598001	Hananto	Basisdata	B
13598004	Heidi	Kalkulus I	B
13598006	Harman	Teori Bahasa	C
13598006	Harman	Agama	A
13598009	Junaidi	Statistik	B
13598010	Farizka	Otomata	C

Tabel 2.9

NIM	Nama	JK	MatKul	Nilai
13598001	Hananto	L	Algoritma	A
13598001	Hananto	L	Basisdata	B
13598004	Heidi	W	Kalkulus I	B
13598006	Harman	L	Teori Bahasa	C
13598006	Harman	L	Agama	A

Resume Relasi :

1. Perkalian kartesian antara himpunan A dan B adalah himpunan yang elemennya semua pasangan terurut (*ordered pairs*) yang mungkin terbentuk dengan komponen pertama elemen himpunan A dan komponen kedua elemen himpunan B.
   dinotasikan dengan $A \times B = \{ (a,b) / a \in A \text{ dan } b \in B \}$

2. Relasi biner R antara himpunan A dan B adalah himpunan bagian dari A x B, dinyatakan $R \subset (A \times B)$
   Pasangan elemen dua himpunan A dan B menjadi anggota R yaitu $(a,b) \in R$. Notasi $(a,b) \in R$ atau a R b diartikan sebagai digunakan 'a dihubungkan dengan b oleh R' atau dibaca 'elemen $a \in A$ *berelasi* dengan $b \in B$', dan notasi $(a,b) \notin R$ atau $a \overline{R} b$ diartikan sebagai 'a tidak dihubungkan dengan b oleh relasi R' atau 'a tidak berelasi dengan b'. Himpunan A disebut daerah asal (dominan) dari R, dan himpunan B disebut daerah hasil (range) dari R.

4. Relasi dapat dinyatakan dalam bentuk tabel, matrik dan graf

5. Sifat-Sifat Relasi Biner:

   a. Refleksif (*reflexive*) : Relasi R pada himpunan A disebut *refleksif* jika (a, a) $\in$ R *untuk setiap* a $\in$ A
   b. Setangkup (Symmetric) : Relasi R pada himpunan A disebut setangkup jika *untuk semua* a, b $\in$ A, (a, b) $\in$R , maka (b, a) $\in$ R. Sebaliknya, R disebut tak setangkup (*anti sysmmetric*) untuk a,b $\in$A, jika (a, b) $\in$ R dan a $\neq$ b, maka (b,a) $\notin$ R
   c. Menghantar (*transitive*): Relasi *R* disebut menghantar bilamana *(a, b)* $\in$*R dan (b, c)* $\in$ *R , maka (a, c)* $\in$*R, untuk a, b, c* $\in$*A.*

Latihan Relasi :

2.1.Tuliskan anggota relasi R dari himpunan A = { 1, 2, 3, 4} yang didefinisikan (x,y) $\in$ R , apabila x > y.

2.2.Diberikan A = {2, 3, 4} dan B = { 3, 4,5,6,7} didefinisikan (x,y) $\in$ R untuk x membagi habis y, tuliskan R dan nyatakan dalam bentuk tabel.

2.3.Tentukan pasangan terurut (order pair) dari himpunan A = { 1,2,3 } ke B = { 1,2,3,4 }

2.4.Tuliskan anggota dari relasi R pada { 1,2,3,4} yang didefinsikan oleh (x,y)$\in$R jika $x^2 \geq y$.

2.5.Diberikan himpunan A = { 1,2,3,4 }

a). Tentukan pasangan terurut (order pair) dari himpunan A ke himpunan A

b). Jika R={(2,2),(2,3),(2,4),(3,2) (3,3) (3,4)} apakah mempunyai sifat refleksif, simetri, dan transitif.

2.6.Diberikan relasi R ={ (1,2),(2,3),(3,4)}dan S={(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,4)}

Tentukan : a). R $\cap$ S ;

b). $R \cup S$;

c). $R - S$;

d). $S - R$ dan $R \oplus S$.

2.7. $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ dan $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Tentukan :

a. $R \cap S$
b. $R \cup S$
c. $R \circ S$

4.7. **Fungsi**

Dalam matematika diskrit konsep fungsi sangat penting, dimana fungsi merupakan relasi yang mempunyai syarat setiap anggota dari daerah definisi (domain) mempunyai pasangan tepat satu anggota dari daerah Hasil (codomain).

4.7.1. Definisi Fungsi

Definisi 2.5. Diberikan dua himpunan A dan B, relasi biner f dari himpunan A ke B merupakan suatu fungsi jika setiap elemen di dalam himpunan A mempunyai pasangan tepat satu elemen himpunan B.

Apabila f adalah fungsi dari himpunan A ke B maka notasi fungsinya

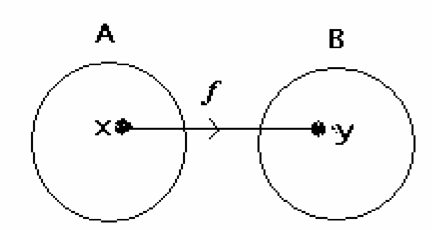
$$f : A \rightarrow B \qquad (1)$$

Himpunan A disebut daerah definisi(domain) dan himpunan B disebut daerah hasil (codomain).

Untuk $x \in A$ dan $y \in B$ maka rumus fungsí 1) dapat dinyatakan sbb:

$$x \rightarrow y = f(x) \qquad (2)$$

ilustrasi pemetaannya



Gambar 2.3 : Fungsi *f* memetakan setiap anggota himpunan A ke B

Terapan Fungsi

1. Formula pengisian nilai dalam bahasa pemrograman dinyatakan dengan assignment

Contoh diberikan rumusan fungsi $f(x) = x^2 + 1$, $f(x) = x + 1$, apabila tidak didefinisikan secara khusus tentang daerah definisi maka daerah definisi dan daerah hasil adalah himpunan Himpunan bilangan riil misal R.

Dalam himpunan pasangan terurut fungsi didefinisikan sbb:

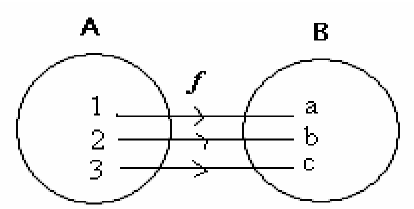
$$f = \{ (x_1, x_2\}/ x \in R \} \qquad (3)$$

2. Kode program (source code)

Fungsi yang dispesifikasikan dalam bahasa Pascal

```
Function  abs(x: integer): integer;
Begin
if  x < 0  then
      abs := -x
else
      abs := x;
end;
```

Contoh 2.18: Relasi $f = \{(1,a),(2,b),(3,c)\}$ dari himpunan A ke B, $\{1,2,3\} \in$ A dan $\{a,b,c\} \in$ B merupa- kan fungsi karena Relasi f memasangkan tepat satu anggota himpunan A dengan anggota himpunan B.



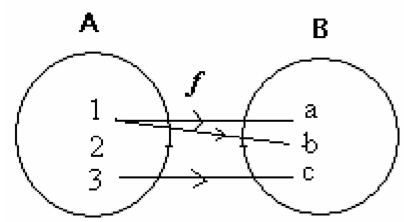
Keterangan :

$$f(1) = a, \quad f(2) = b \text{ dan } f(3) = c$$

dari contoh 2.18 tersebut himpunan A disebut daerah definisi dan himpunan B sebagai daerah hasil.

Contoh 2.19.

Relasi $f = \{(1,a),(1,b),(3,c)\}$ dari himpunan A ke B, $\{1,2,3\} \in$ A dan $\{a,b,c\} \in$ B bukan merupakan fungsi karena terdapat satu anggota himpunan A mempunyai dua pasangan anggota himpunan B dan tidak semua anggota himpunan A (yaitu $2 \in$ A) mempunyai pasangan anggota himpunan B

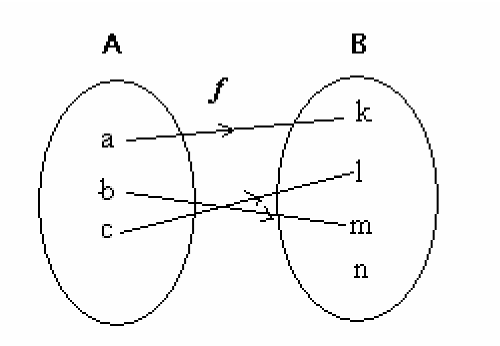


4.7.2. Jenis Fungsi

Ditinjau pada daerah hasil atau bayangan fungsi dibedakan atas fungsi injektif(injective), surjektif(surjective) dan bijeksi (bijection)

Fungsi injektif (injective)

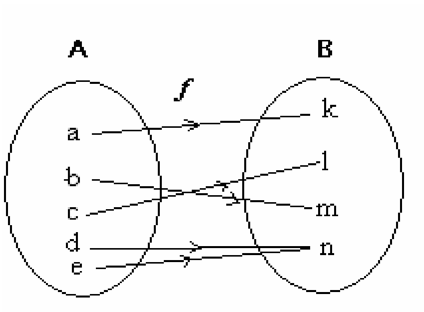
Definisi 2.6: Fungsi *f* dikatakan one-to-one atau injektif (*injective*) apabila a dan b anggota himpunan A maka $f(a) \neq f(b)$ bilamana $a \neq b$ untuk $f(a)$ dan $f(b)$ anggota himpunan B.



Gambar 2.4: Fungsi one-to-one

Fungsi surjektif(surjective)

Definisi 2.7: Fungsi *f* dikatakan pada (onto) atau surjektif(surjective) apabila setiap elemen dari himpunan B merupakan bayangan dari satu atau lebih elemen himpunan A.Dengan kata lain seluruh elemen himpunan B merupakan jelajah dari *f*.



Gambar 2.5 . Fungsi surjektif (fungsi pada)

Fungsi bijeksi*(bijection)*

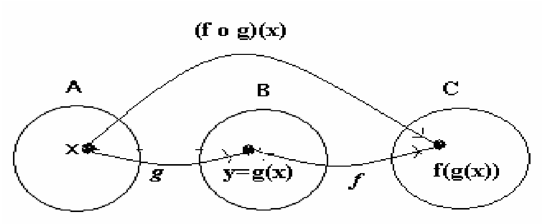
Definisi 2.8: Fungsi *f* dikatakan berkorespodensi satu-satu atau bijeksi*(bijection)* apabila ia fungsi one-to-one dan surjective.

4.7.3. Fungsi Invers

Apabila f merupakan fungsi berkorespondensi satu-satu dari himpunan A ke himpunan B maka fungsi tersebut mempunyai invers yaitu $f^{-1}(y) = x$, untuk $x \in A$ dan $y \in B$, f^{-1} merupakan invers dari fungsi f.

4.7.4. Komposisi fungsi

Komposisi dari dua fungsi f dan g dinyatakan $f \circ g$, f merupakan fungsi yang memetakan anggota himpunan A ke himpunan B dan fungsi g memetakan anggota himpunan B ke himpunan C. Fungsi dari himpunan A ke himpunan C didefinisikan $f \circ g(x) = f(g(x))$, $x \in A$



Gambar 2.6 . Komposisi fungsi

4.7.5. Beberapa Fungsi Khusus

Beberapa fungsi khusus yang sering digunakan dalam bahasa pemrograman seperti fungsi *floor, ceiling, modulo, faktorial, perpangkatan dan logaritmik.*

Fungsi floor dan ceiling

Fungsi ini diperlukan untuk membulatkan ke bawah dan keatas. Fungsi floor diperlukan untuk membulatkan nilai pecahan kebawah, misalkan x bilangan riil maka bilangan floor dilambangkan $\lfloor x \rfloor$. Fungsi *ceiling* diperlukan untuk membulatkan nilai pecahan keatas dan dilambangkan $\lceil x \rceil$.

Contoh.2.20

Nilai fungsi floor seperti :

$\lfloor 4.6 \rfloor$. = 4 ; $\lfloor 12.7 \rfloor$. = 12; $\lfloor -0.25 \rfloor$. = -1

Nilai fungsi *ceiling* seperti :

$\lceil 4.6 \rceil$.= 5 ; $\lceil 12.7 \rceil$.=13 ; $\lceil -0.25 \rceil$. = 0

Fungsi Modulo

Fungsi modulo adalah fungsi dengan operator **mod**, misalkan b sembarang bilangan bulat dan m bilangan bulat positip maka *b **mod** m* memberikan sisa pembagian bilangan bulat apabila b dibagi dengan m .

Contoh 2.21

15 mod 4 = 3 (3 menyatakan sisa pembagian 15 dibagi 4)

8 mod 2 = 0 (0 menyatakan bahwa 8 habis dibagi 2, tidak ada sisa)

Contoh 2.22.

Misal *f* adalah fungsi dari X untuk X ={1, 2, 3 } ke X, yang didefinisikan oleh *f*(x) = 4x mod 5 tuliskan himpunan pasangan terurut yang terjadi.

x = 1 $\longrightarrow$ *f*(1) = 4 .1 mod 5 = 4

x = 2 $\longrightarrow$ *f*(2) = 4 .2 mod 5 = 3

x = 3 $\longrightarrow$ *f*(3) = 4 .3 mod 5 = 2

Fungsi hash

Misalkan dipunyai sel-sel pada memori komputer yang diberi indek dari 0 sampai dengan 10 seperti tampak pada gambar 2.7.

132		102	15	5	257		558		32
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Gambar 2.7. Sel memori komputer dengan nomor 1 - 10

Akan disimpan dan menyelamatkan bilangan bulat non negatif dalam sel tersebut. Salah satu pendekatan adalah menggunakan fungsi hash (hash function). Fungsi ini akan mengambil butir data untuk disimpan atau diselamatkan serta mengurutkan untuk diletakkan pada lokasi yang ditentukan. Untuk menyimpan atau mengambil bilangan n pilihan pertama untuk lokasi n mod 11 dengan fungsi hash sebagai berikut

$$h(n) = n \bmod 11$$

gambar 2.7 hasil penyimpanan urutan bilangan 15, 558, 32, 132,102, dan 5 dalam penempatan pada sel digunakan fungsi hash

h(15) : 15 mod 11 = 4 maka bilangan 15 menempati sel dengan nomor 5.
h(558) : 558 mod 11 = 8 maka bilangan 558 menempati sel dengan nomor 8.

demikian seterusnya apabila sel sudah ditempati berarti terjadi bentrokan (collision resolution policy) solusinya mencari sel yang belum terpakai tertinggi berikutnya). Contoh kasus ini bilangan 257 h(257) : 257 mod 11 adalah 4, seharusnya menempati sel nomor 4 maka bilangan tersebut dapat ditempatkan pada sel kosong berikutnya yaitu sel nomor 6.

Fungsi faktorial

Untuk sembarang bilangan bulat non negatif n, faktorial dari n dilambangkan dengan n ! yang didefinisikan

$$n! = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 1x2x...x(n-1)\ x\ n, & n \geq 1 \end{cases} \qquad (4)$$

0! didefinisikan 1

Contoh : 2.22.

1! = 1

2! = 2.(2-1) = 2

3! = 3. (3-1) (3-2) = 6

dst

n! = n. (n-1) !

Fungsi Eksponensial dan logaritmik

Fungsi eksponensial

Fungsi ini dapat dinyatakan sbb:

$$a^n = \begin{cases} 1 & , \quad n = 0 \\ \underbrace{axax...xa}_{n}, & n \geq 1 \end{cases} \tag{5}$$

Untuk nilai n negatif $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

Fungsi Logaritmik

$$y = {}^{a}\log x \leftrightarrow x = a^y \tag{6}$$

4.7.4. Fungsi dan algoritma Rekursif

Prosedur berulang (recursive prosedure) adalah prosedur yang berjalan sendiri sedangkan algoritma rekursif merupakan algoritma yang mengandung presedur rekursif

Fungsi Rekursif

Dengan meninjau kembali fungsi untuk menghitung faktorial yaitu

$$n! = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ 1x2x...x(n-1)\ x\ n, & n \geq 1 \end{cases}$$

bentuk faktorial tersebut dapat dinyatakan sbb

n! = 1x2x...x(n-1) x n =(n-1)! x n , untuk n > 0

secara rekursif bentuk faktorial dapat dinyatakan

$$n! = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ (n-1)!\ x\ n, & n \geq 1 \end{cases} \qquad (7)$$

Jika f(n) = n! maka bentuk 7) dapat dinyatakan sbb

$$f(n) = \begin{cases} 1 & , n = 0 \\ n\ x\ f(n-1) & , n \geq 1 \end{cases} \qquad (8)$$

Definisi 2.9. Fungsi *f* dikatakan fungsi rekursif apabila definisi fungsinya mengacu pada dirinya sendiri

Algoritma Rekursif

Seperti dinyatakan diatas bahwa algoritma rekursif merupakan algoritma yang mengandung presedur rekursif maka dibawah ini di berikan ilustrasi bagamana menghitung n! dengan algoritma rekursif lihat contoh berikut

Contoh 2.23. Akan dihitung nilai n! dengan algoritma rekursif

```
Input : n,  sebuah  bilangan bulat  lebih besar  dari 0
output: n!
prosedure  faktorial(n)
if  n = 0 then
return(1)
return(n*faktorial(n-1))
end faktorial
```

Maksud algoritma tersebut akan dihitung n! untuk beberapa nilai n yang di inputkan

Apabila $n = 0$, maka statemen baris 3 menyakan nilai 1,

Apabila $n = 1$, maka perhitungan berlanjut ke statemen baris 4 (karena $n \neq 0$) disini akan dilakukan proses penghitungan $(n-1)!.n = 0!.1= 1.1 =1$

Apabila $n = 1$, maka perhitungan berlanjut ke statemen baris 4 (karena $n \neq 0$) disini akan dilakukan proses penghitungan nilai 1 ! yaitu $(n-1)!.n = 0!.1= 1.1 =1$

Apabila $n = 2$, maka proses perhitungan ke statemen baris 4 (karena $n \neq 0$) disini akan dilakukan proses penghitungan 2! yaitu $(n-1)!.n = 1!.2 = 1.2 = 2$ dst.Proses akan berhenti apabila data yang diinputkan sudah terealisasi.

Definisi 2.10: Fungsi f dikatakan fungsi rekursif (recurrence relation)

Penyusunan fungsi rekursif memperhatikan aturan :

a). Basis , bagian yang berisi nilai awal yang tidak mengacu pada di sendiri.

b). Rekurens: bagian ini mendefinisikan argumen fungsi dalam terminologi dirinya sendiri

Contoh 2.24 : Akan ditentukan nilai 4 ! secara rekursif.

Jawab :

(a). basis , $n! =1$ untuk $n = 0$

(b). rekurens:

$$n! = n \times (n-1)! \quad \text{Untuk } n > 0$$

maka untuk menentukan nilai 4 ! digunakan langkah berikut :

(1) $4!= 4 \times 3!$

(2) $3!= 3 \times 2!$

(3) $2!= 2 \times 1!$

(4) $1! = 1 \times 0!$

(5) $0! = 1$

sehingga apabila proses dirunut-balik menjadi

(5) 0! = 1

(4) 1! = 1 x 0!=1x1=1

(3) 2!= 2x1!= 2 x 1=2

(2) 3! = 3 x 2! = 3 x 2 = 6

(1) 4! = 4 x 3! = 4 x 6 =24

maka nilai 4 ! adalah 24 (4! = 24).

Contoh 2.25. Diberikan fungsi rekursif f, yang didefinisikan

$$f(n) = \begin{cases} 0 & , n = 1 \\ f(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor) + 1 & , n > 1 \end{cases}$$

n bilangan bulat positip, tentukan nilai *f*(25)

Jawab :

$f(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor)$ merupakan fungsi floor maka hasil pembagian dibulatkan kebawah

f(25) = $f(25) = f(\left\lfloor \frac{25}{2} \right\rfloor) + 1 =$ *f*(12) +1

= [f(6) +1]+1= f(6) + 2

= [f(3) +1]+2= f(3) + 3

= [f(1) +1]+3= f(1) + 4

= 0 + 4 = 4 ,

$f(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor) = f(\left\lfloor \frac{1}{2} \right\rfloor) = 0$ (nilai dibulatkan ke nol).

Resume. Fungsi :

1.Relasi dari himpunan A ke himpunan B disebut fungsi apabila setiap elemen di dalam himpunan A mempunyai pasangan tepat satu elemen himpunan B. dan dinyatakan f : A → B atau

2. Beberapa fungsi khusus yang sering digunakan dalam bahasa pemrograman seperti fungsi *floor, ceiling, modulo, faktorial, perpangkatan dan logaritmik.*

Referensi :

1. Johnsonbaugh, 2005, *Discrete Mathematics* , Prentice Hall.
2. Liu C.L , 1997, *Dasar- dasar Matematika Diskret* Mc. Graw-Hill Inc.
3. Munir R, 2005, *Matematika Diskrit*', Informatika Bandung.
4. Siang J.J, 2002, Matematika Diskrit dan Apliksinya pada Ilmu Komputer, Andi Offset Yogyakarta.

Latihan Fungsi:

Diketahui X = { 1, 2, 3, 4} ke Y = { a, b, c, d}, selidiki apakah relasi soal 2.8-2.10 merupakan fungsi dari himpunan X ke himpunan Y. Jika merupakan fungsi tentukan domain dan rangenya.

2.8. {(1,a), (2,a), (3,c),(4,b)} .

2.9 {(1,c), (2,a), (3,b), (4,c) (2,d)}

2.10 {(1,b), (2,b), (3,b),(4,b)} .

2.11. Berikan ilustrasi grafis soal 2.8-2.9

2.12. Misalkan f adalah fungsi dari X = { 0, 1, 2, 3, 4} ke X yang didefinisikan

f(x) = 3x mod 5.

a). Tuliskan f sebagai pasangan terurut .

b). Apakah f injeksif atau surjektif.

2.13. Diberikan f adalah fungsi dari X = { 0, 1, 2, 3, 4,5} ke X yang didefinisikan
f(x) = 4x mod 6.

a). Tuliskan f sebagai pasangan terurut .

b). Apakah f injeksif atau surjektif.

Setiap fungsi hash pada soal 2.14 -2.17 tunjukkan bagaimana data bisa disisipkan pada urutan yang diberikan pada sel kosong sebelumnya.

2.14. h(x) = x mod 11, sel diberi indeks 0 hingga 10 dengan data 53, 13, 281, 743, 377, 20,10, 796

2.15. h(x) = x mod 17, sel diberi indeks 0 hingga 16 dengan data 714, 631, 26, 373, 775, 906, 509, 2032, 42, 4, 136, 1028.

2.17. h(x) = x^2 mod 11, sel diberi indeks 0 hingga 18 dengan data 53, 13, 281, 743, 377, 20, 10, 796.